SERIE 1

Exercice 1

On considère un R-espace vectoriel euclidien E de dimensions n muni d'une base $\{\vec{e}_i\}_{i=1,n}$

1. <u>Convention d'Einstein</u>

Ecrire chacune des expressions suivantes en utilisant la convention d'Einstein

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots.. + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \ldots.. + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

$$\Phi = (x_1)^1 + (x_2)^2 + \ldots.. + (x_n)^n$$

On rappelle le symbole de Kronecker δ_{ij} qui est donné par la relation :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer δ_{12}, δ_{22} et δ_{ii}

2. Soient un scalaire α, un vecteur $\vec{V} = v_i \vec{e}_i$ de E et deux tenseurs du second ordre définis sur E : $A = A_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ et $B = B_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

a. Expliciter les tenseurs :

αA ; $A \vec{V}$; $A B \vec{V}$; $\alpha A A B \vec{V}$

b. Expliciter les tenseurs :

$A.\vec{V}$; $A.B$; $A{:}\vec{V}$; $A{:}B$; $A{:}I$ (I étant le tenseur unité)

c. Peut-on définir le tenseur $A{:}\vec{V}$

Exercice 2

Soit un R-espace vectoriel euclidien E de dimensions 3 muni d'une base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. On définit le pseudo-tenseur d'orientation le tenseur d'ordre 3 :

$$\theta = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$$

dont les composantes ε_{ijk} sont des fonctions alternées des indices i ; j ; k tel que $\delta_{123} = 1$:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3) \\ -1 \text{ si } (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3) \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que :

   $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

   $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$

   $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6$

2. Vérifier que :

   $\vec{X} \times \vec{Y} = (\varepsilon_{ijk} X_j Y_k)\,\vec{e}_i$

   Exprimer alors le produit vectoriel sous la forme d'une opération tensorielle

3. Soient trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de E. vérifier que le produit mixte $\vec{C}.(\vec{A} \times \vec{B})$ s'identifie au produit contracté triple du pseudo-tenseur d'orientation par $\vec{C} \otimes \vec{B} \otimes \vec{A}$:

$$\theta \,\vdots \left[\vec{C} \otimes \vec{B} \otimes \vec{A}\right]$$

4. Soit un tenseur du second ordre antisymétrique Ω, monter qu'il existe un pseudo-vecteur $\vec{\omega}$ donné par la relation :

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{kj}$$

   tel que pour tout vecteur $\vec{X}$ de E on a :

$$\Omega \cdot \vec{X} = \vec{\omega} \times \vec{X}$$

5. montrer pour un champ vectoriel $\vec{X}$ la relation suivante :

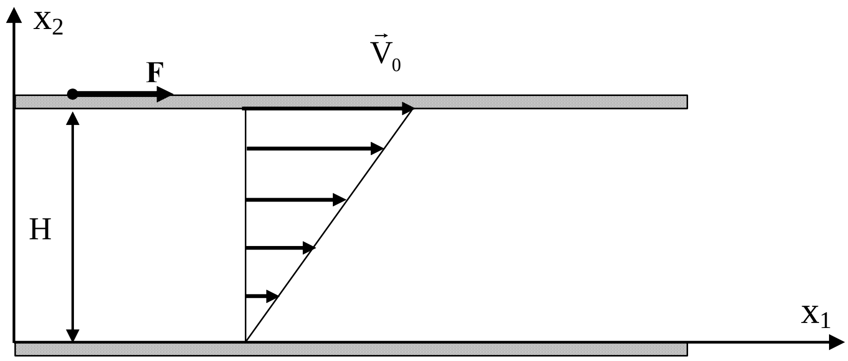
$$\vec{X} \cdot \vec{\nabla}\vec{X} = \vec{\nabla}\left[\frac{1}{2}X^2\right] + (\vec{\nabla} \times \vec{X}) \times \vec{X}$$

Exercice 3

On considère un fluide réel maintenu entre deux plaques planes parallèles et distantes d'une épaisseur $H = 10\ \text{cm}$. On suppose que la plaque supérieure est animée d'une translation uniforme à la vitesse $V_0 = 10\ ms^{-1}$. On suppose également que suite à la condition d'adhérence du fluide aux parois, le champ de vitesse observé dans ce fluide est :

$$\mathbf{v} = \left(\frac{V_0}{H}\right) x_2\ \mathbf{e}_2$$

Comme le montre la figure suivante.



1. Calculer le vecteur vorticité de cet écoulement.
2. Calculer les éléments du tenseur de gradient de vitesse
3. En déduire les éléments des tenseurs des taux de déformation et de rotation
4. Vérifier que quelque soit le vecteur **X** de l'espace vectoriel E on a :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{X}$$

5. Calculer la vitesse de déformation dans les directions suivantes :

   a - $\mathbf{e}_1$

   b - $\mathbf{e}_2$

   c - $\mathbf{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$

   d - $\mathbf{k}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$

6. On déduit une description qualitative de la transformation d'une particule de ce fluide pendant un intervalle infinitésimal de temps.